Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:_____________________________
Carnet:_____________ __ Sección:______

1er. Parcial de Matemáticas III. Tipo A (30%)

1. (6 puntos) Calcule el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Usando, en forma conveniente, las propiedades de los determinantes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -a & .-a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & ab & 1+2ab \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1+a & 1+a & 1+a \\ 0 & 1 & 1+b & 1+2b \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

2. (11 puntos) Determine el *k* para que el sistema

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 + x_3 &= 2k - 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 &= k^2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 &= 3 - 2k \end{aligned}$$

a) Sea inconsistente.
b) Tenga solución única.
c) Tenga infinitas soluciones. Halle las infinitas soluciones.

Solución:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & | & 2k-1 \\ 1 & k & 1 & | & k^2 \\ 1 & 1 & k & | & 3-2k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 3-2k \\ 1 & k & 1 & | & k^2 \\ k & 1 & 1 & | & 2k-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & | & k^2+2k-3 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & | & -1-k+2k^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & | & k^2+2k-3 \\ 0 & k-1 & k^2-1 & | & 1+k-2k^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & 3-2k \\ 0 & k-1 & 1-k & | & k^2+2k-3 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 & | & 3k-k^2-2 \end{pmatrix}$$

Si $k = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si $k = 2$, el sistema es inconsistente.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, el sistema tiene solución única.

Sustituimos $k = 1$ para encontrar las infinitas soluciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

3. (9 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Encuentre adjA y A^{-1}. Luego encuentre x tal que
b) Ax=b si $b=(0,-5,10)^t$
c) $A^t x=b$ si b=(12,-12,-8).

Solución:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$adjA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $x = A^{-1}b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $x = \left(A^{-1}\right)^t b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$

4. (4 puntos) Si A es una matriz 2x2 tal que $AA^t = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, halle $|A^{-1}|$.

Solución:

$$\left|AA^t\right| = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 40 - 4 = 36 \Rightarrow \left|AA^t\right| = 36 \Rightarrow |A|\left|A^t\right| = 36 \Rightarrow |A|^2 = 36 \Rightarrow |A| = \pm 6$$

¡Justifique todas sus respuestas!

Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.
Julio –Septiembre 2012

Nombre:____________________________
Carnet:_____________ __ Sección:______

1er. Parcial de Matemáticas III. Tipo B (30%)

1. (10 puntos) Determine los valores de *k* para que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + k^2 x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + kx_3 &= k \end{aligned}$$

a) Sea inconsistente
b) Tenga solución única.
c) Tenga infinitas soluciones. Halle las infinitas soluciones.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k^2 & 1 \\ 1 & 3 & k & k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & k^2-1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & k \\ 0 & -1 & k^2-1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & k \\ 0 & 0 & k^2+k-2 & k+1 \end{pmatrix}$$

Si $k = 1$ ó $k = -2$, el sistema es inconsistente.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, el sistema tiene solución única.

El sistema nunca tiene infinitas soluciones.

2. (5 puntos) Pruebe que $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b-a \\ c^2-a^2 & c-a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b-a & 1 \\ c-a & 1 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)$$

3. (11 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calcule det(A-λI)
b) ¿Para cuáles valores de λ, si existe, la matriz A-λI es invertible?
c) Sea λ = 1, halle la inversa de A-λI.

Solución:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10$$

Los valores para los cuales el determinante es igual a cero son: λ = -1, λ = 2 y λ = 5.

Si λ= 1, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -1 & -1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

4. (4 puntos) Sean A, B, C y D matrices de 3x3 con detA=2, detB=1. Halle los valores de detC y detD si:

   $C = 2AB^{-1}D^{-1}BC^{-1}D$ y $D=3A^2B^2C^{-1}$

Solución:

$$\det C = \det\left(2AB^{-1}D^{-1}BC^{-1}D\right) \Rightarrow |C| = 2^3|A|\left|B^{-1}\right|\left|D^{-1}\right||B|\left|C^{-1}\right||D| \Rightarrow |C| = \frac{8|A||B||D|}{|B||D||C|}$$

$$\Rightarrow |C|^2 = 8|A| \Rightarrow |C| = \pm 4$$

$$\det D = \det\left(3A^2B^2C^{-1}\right) \Rightarrow |D| = \frac{3^3|A|^2|B|^2}{|C|} = \pm 27$$

¡Justifique todas sus respuestas!